



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2001

Niveau 1



Exercice I

1. * Supposons que $|z_1| = |z_2| = 1$ alors $z_1 = e^{i\alpha}$ et $z_2 = e^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $b = z_1 z_2 = e^{i(\alpha+\beta)}$, $a = -(z_1 + z_2) = -(e^{i\alpha} + e^{i\beta})$, donc $|b| = 1$, et $|a| \leq |z_1| + |z_2| = 2$.

Par ailleurs $a = e^{i(\alpha+\beta)/2} [e^{i(\alpha-\beta)/2} + e^{-i(\alpha-\beta)/2}]$

$$= -2\cos((\alpha-\beta)/2) e^{i(\alpha+\beta)/2}$$

D'où $\text{Arg } b = \alpha + \beta \pmod{2\pi}$ et $\text{Arg } a = (\alpha + \beta)/2 + k\pi$, où $k=0$ ou 1 , selon que

$-2\cos((\alpha-\beta)/2) > 0$ ou $-2\cos((\alpha-\beta)/2) < 0$.

Donc $2\text{Arg } a = \alpha + \beta + 2k\pi \pmod{2\pi} = \alpha + \beta \pmod{2\pi} = \text{Arg } b$.

- Supposons que $|b| = 1$, $|a| \leq 2$ et $\text{Arg } b = 2\text{Arg } a$ alors $b = e^{i\theta}$ et $a = |a|e^{i\theta/2}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Le discriminant vaut $\Delta = a^2 - 4b = (4 - |a|^2) e^{i(\theta+\pi)}$ car $|a|^2 - 4 \leq 0$

Alors $z = e^{i\theta/2} (-|a| \pm i(4 - |a|^2)^{1/2})$, donc $|z| = 1/2(|a|^2 + 4 - |a|^2)^{1/2} = 1$.

II).1) On suppose $a=b$. Alors :

(1) $\Rightarrow a=b=c$ (évident)

(2) $\Rightarrow a(j^2+j) + c = a(j^4+j^2) + c = 0$ car $j^4 = j \cdot j^3 = 1$ et $j \neq 1 \Rightarrow (-a+c) = 0 \Rightarrow a=b=c$ ($j^2+j+1=0$)

(3) $\Rightarrow 2a^2 + c^2 = a^2 + 2ac \Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a=b=c$

Il est clair de supposer a, b et c distincts deux à deux.

2) (1) $\Leftrightarrow$ (3). En effet on a : (1) $\Leftrightarrow$ les images des trois nombres complexes a, b, c sont les trois sommets d'un triangle équilatéral (éventuellement réduit à un point)

$$\Leftrightarrow c-a = (b-a)e^{i\pi/3} \text{ ou } c-a = (b-a)e^{-i\pi/3}$$

$$\Leftrightarrow [(c-a) - (b-a)e^{i\pi/3}][(c-a) - (b-a)e^{-i\pi/3}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a)^2 + (a)^2 - (a)(a) = 0 \Leftrightarrow (3)$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3). En effet, on a:

$$(2) \Leftrightarrow aj^2 + bj + c = 0 \text{ ou } aj + bj^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (aj^2 + bj + c)(aj + bj^2 + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \Leftrightarrow (3)$$

D'où (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

III) Puisque $z=1$ n'est pas solution, $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$

$$\Leftrightarrow Z_n=1, \text{ avec } Z = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow Z = e^{i(2ik\pi/n)}, k=0,1,\dots, n-1 \text{ et } \frac{z+1}{z-1} = e^{i(2ik\pi/n)}, \text{ soit } z = (1 - e^{(2ik\pi/n)}) = -1e^{(2ik\pi/n)} \text{ avec } k \neq 0.$$

Il vient $z_k = -i \cotg(k\pi/n)$ avec $k=1,2,\dots,n-1$.

Il y a $(n-1)$ solutions, le polynôme $P(z) = (z+1)^n - (z-1)^n$ est de degré $n-1$.

Exercice 2

1) 1^{er} cas : $k > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = 1$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad x \rightarrow 0^+$$

Définissons F_k sur $\mathbb{R}^+$ par $F_k(0) = 1$ et $F_k'(x) = f_k(x)$, quelque soit $x > 0$.

Alors F_k est le prolongement par continuité de f_k sur $\mathbb{R}^+$.

2^{eme} cas : $k < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = 0.$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad x \rightarrow 0^+$$

Alors le prolongement par continuité de f_k sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction F_k définie par :

$F_k(0) = 0$ et $F_k(x) = f_k(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

2). 1^{er} CAS: $k > 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (F_k(x) - F_k(0))/x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x^k \ln x - 1)/x$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad x \rightarrow 0^+$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x / x, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad x \rightarrow 0^+$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{k-1} \ln x$$

$$x \rightarrow 0^+$$

-1^{er} sous cas : $0 < k < 1$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} (F_k(x) - F_k(0))/x = -\infty \notin \mathbb{R},$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$\Rightarrow F_k$ n'est pas dérivable à droite en 0. Cependant, son graphe admet une demi-tangente horizontale orientée vers le bas.

-2^{eme} sous cas : $k > 1$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F_k(x) - F_k(0))/x = 0 \in \mathbb{R}$,

$$x \rightarrow 0^+$$

$\Rightarrow F_k$ est dérivable à droite en 0, avec $F_k'(0) = 0$

.2^{eme} cas : $k < 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F_k(x) - F_k(0))/x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\exp(x^k \ln x))/x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp((x^{k-1}) \ln x) = 0 \in \mathbb{R}$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$\Rightarrow F_k$ est dérivable en droite en 0, avec $F_k'(0) = 0$

3) Etude de F_k sur $\mathbb{R}^+$

La fonction F_k est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, elle est dérivable au moins sur $]0, +\infty[$ avec :

Quelque soit $x > 0$, $F_k'(x) = f_k'(x) = (k \ln x + 1) x^{k-1} f_k(x)$; d'où :

$F_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k = \exp(-1/k)$ et $y_k = F_k(x_k) = \exp(-(\exp(-1)/k))$.

.1^{er} cas : $k > 0, k \neq 1$.

Alors $F_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_k$, $F_k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_k$

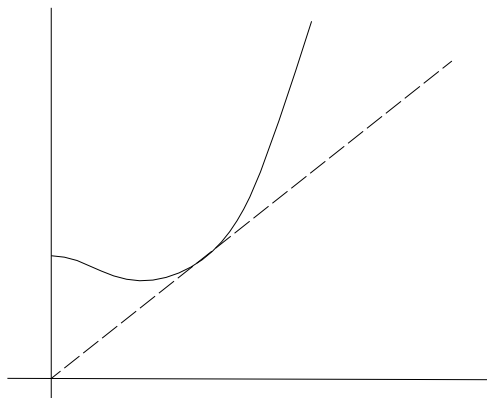
$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x) = +\infty$

$$x \rightarrow +\infty$$

-1^{er} sous cas : $k > 1$.

Alors $0 < 1/k < 1$, $1 > \exp(-1/k) = x_k > \exp(-1) = \alpha = 0,36$ et $1 > y_k > \exp(-(\exp(-1))) = \beta = 0,69$

x	0	α	x_k	1	$+\infty$
F'_k	0	-	0	+	+
F_k	1			1	$+\infty$



Le $M_k(x_k, y_k)$ est un minimum.

Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp((x_k - 1) \ln x) = +\infty$, donc C_k admet une branche

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

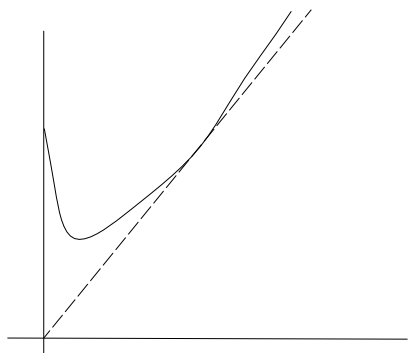
Parabolique de direction (Oy).

- 2^{ème} sous cas : $0 < k < 1$. Alors $1/k > 1$, donc $x_k = \exp(-1/k) < \alpha = \exp(-1)$.

Aussi $\exp(-1/k) > \exp(-1)$, d'où $-\exp(-1/k) < -\exp(-1)$,

Soit $0 < y_k = \exp(-(\exp(-1)/k)) < \beta = \exp(\exp(-1))$.

x	0	x_k	α	1	$+\infty$
F'_k	0	-	0	+	+
F_k	1	y_k		1	$+\infty$



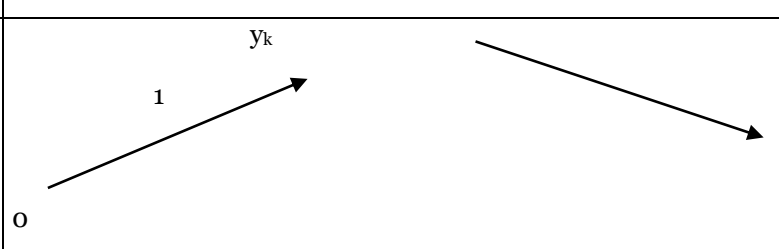
Le point $M_k(x_k, y_k)$ est encore un minimum. Puisque

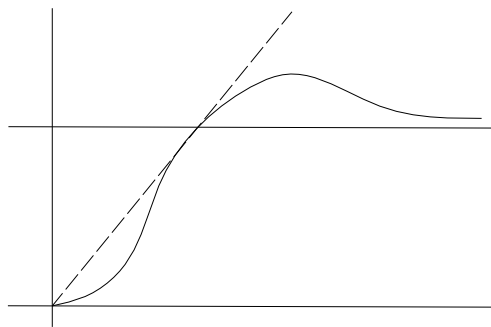
$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_k(x)/x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp((x_k - 1) \ln x) = +\infty$, C_k encore une branche parabolique de direction (Oy).

$X \rightarrow +\infty$ $X \rightarrow +\infty$

2^{eme} cas : $k < 0$. Dans ce cas, $-1/k > 0$, donc $x_k = \exp(-1/k) > 1$ et $-(\exp(-1))/k > 0$,

d'où $y_k = \exp(-\exp(-1)/k) > \exp(0) = 1$.

x	0	α	1	x_k	$+\infty$
F'_k		+	1 +	0	-
F_k					



Le point M_k est ici un maximum.

C_k admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

EXERCICE 3

1. a) Soit X la v.a.r égale au nombre de souris blanches parmi les souris prélevées. Ici, X suit une loi binomiale $B(8, 1/4)$.

$$\Rightarrow \Pr(X=2) = C_8^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{7 \cdot 3^6}{4^7} = \frac{5103}{16384}$$

- b) On a $\Pr(X \geq 1) = 1 - \Pr(X=0)$. D'où $\Pr(X \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow \Pr(X=0) \leq 0,05$

$$\Leftrightarrow C_n^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0,05$$

- c) l'événement certain $\Leftrightarrow \Pr(X \geq 1)$, i.e. $\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, c - e qui est impossible. Donc

on ne peut pas trouver un entier n tel que cet événement soit certain.

2- Ici,

$$\Pr(X=2) = \frac{C_5^2 C_{15}^6}{C_{20}^8} = \frac{385}{969}$$

EXERCICE 4

1) le barycentre G (-3) et O (2) est aussi le barycentre de A (-1), B (-1)

C (-1) et de B (1) et C (1). C' est donc le point A Alors $-3MG + 2MO = -MA$ et E_1 admet pour équation $MA = MO'$ E_1 est donc la médiatrice de $[AO']$ (ou encore la parallèle à (BC) passant par G)

2) On a

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = (MG + GB)(MG + GB) + (MG + GC)(MG + GC)$$

$$-2(MG + GA)(MG + GA) = 2MG(GB + GC - 2GA) + GB^2 + GC^2 - 2GA^2$$

Mais d'une part, l'isobarycentre d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane à partir du sommet, donc $GB^2 + GC^2 - 2GA^2 = 0$

$$\text{Et d'autre part, } \vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GO} + \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{GO} = \vec{GO}' = -\vec{GA}$$

L'équation de E_2 s'écrit alors $6\vec{MG} \cdot \vec{AG} = k$ Soit donc $H \in (AG)$ tel que $\vec{HG} \cdot \vec{AG} = k/6$.

$$\text{Alors } \vec{MG} \cdot \vec{AG} = k/6 \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{AG} + \vec{HG} \cdot \vec{AG} = k/6, \text{ soit } \vec{MH} \cdot \vec{AG} = 0$$

Et E_2 est parallèle à (BC) passant par H. Pour que $G \in E_2$, il faut et il suffit que $k=0$ et alors $E_1 = E_2$

3) Un calcul analogue à celui de 2) montre que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\text{Mais, } AO = AB \cdot \sin(\pi/3) = a\sqrt{3}/2 \text{ donc } AG = \frac{2}{3}AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Et } AG^2 = \frac{1}{3}a^2 = GB^2 = GC^2 \text{ d'où l'égalité demandée.}$$

L'équation de E_3 est donc $3MG^2 = a^2$, d'où $E_3 = C(G, \frac{a\sqrt{3}}{3})$ (cercle)

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln 20}{\ln 3/4} = \frac{-2\ln 2 - \ln 5}{\ln 3 - 2\ln 2} \approx \frac{299}{28}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 11$$